4Д

УДК 681.142.2/518.3

П.Н. Денисенко
Кибернетико-технический колледж, Учебно-научный комплекс, КННПК, г. Кировоград, Украина
pnden_osvita@yahoo.com

Оптимальный алгоритм для решения интегральных уравнений Гаммерштейна в системах компьютерной алгебры

В работе построен алгебраический алгоритм для вычисления алгебраического многочлена y_n порядка $n \in N$ в системах компьютерной алгебры. Этот многочлен аппроксимирует решение $y(x)$, $x \in [a,b]$ интегрального уравнения Гаммерштейна. Эта аппроксимация оптимальна в пространстве $C_{[a,b]}$.

Актуальность темы исследования. Обыкновенные дифференциальные и интегральные уравнения являются классическим аппаратом математического моделирования [1]. Уравнения Гаммерштейна вида

$$L[y] + g = H[f(y)], \quad L\,,\ \mathrm{H}\ :\ \mathrm{polynomial} \to \mathrm{polynomial}\,,\ \mathrm{g} \in \mathrm{polynomial} \qquad (1)$$

используют в математических моделях более часто, чем интегральные уравнения других типов. Maple, Mathematica, Mathcad, Matlab, APS и другие компьютерные системы стали естественной средой математического моделирования. Эти системы выполняют символьные (аналитические) преобразования композиции специальных математических функций и решают обыкновенные дифференциальные уравнения, являются системами компьютерной алгебры (СКА).

Задача работы. Построить алгебраический алгоритм для вычисления в СКА алгебраического многочлена y_n порядка $n \in N$. Этот многочлен аппроксимирует решение $y = y(x)$, $x \in [a,b]$ интегрального уравнения Гаммерштейна вида (1). Эта аппроксимация оптимальна в пространстве $C_{[a,b]}$, в этом пространстве ограничен *коэффициент оптимальности алгоритма*

$$C_n(\,algorithm, (1), C_{[a,b]}\,) = \|\, y - y_n \,\|_{C[a,b]} \,/\, \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|\, y(x) - (c_0 + \ldots + c_n\ x^n) \,\|_{C[a,b]}.$$

Актуальность задачи. СКА не решают интегральные уравнения вида (1).

1. Алгоритм 1

Вход. Уравнение (1) – *task* (1), отрезок $[a,b]$, параметр n.

Преобразования.

1. Вычислить начальное приближение к решению уравнения (1) $y_{n,0} = 0$.

2. Для $s = 1, 2, \ldots$ вычислить:

– преобразование $f_s = f(\,x,\ y_{n,s-1}\,)$ многочлена $y_{n,s-1}$ функцией f (1),

– алгебраический многочлен, интерполирующий функцию f_s в узлах Чебышева на отрезке $[a,b]$

$$F_s = U_n[\,f_s\,] = U_n[\,\{\,f_s(\ a + (b - a)\ \ (1 - \cos(i\ \pi\ /n\ ))/2),\quad i = 0,\ldots,n\,\}], \qquad (2)$$

– преобразование многочлена (2) интегральным оператором $H[y]$ уравнения (1),

– алгебраический многочлен

$$g_s = H[\ F_s\ ], \qquad (3)$$

– линейное интегральное уравнение с многочленными коэффициентами (ЛИУМК)

$$L[y] + g = g_s, \quad (4)$$

– решение ЛИУМК (4) на отрезке $[a,b]$ по алгоритму [2] с параметром n – алгебраический многочлен

$$y_{n,s} = algorithm_[2]\ (\ L[y] + g = g_s,\ [a,b],\ n). \quad (5)$$

Вычислить предел последовательности алгебраических многочленов (5).

Выход. Искомая аппроксимация решения y уравнения (1)

$$y_n = algorithm_1\ (\ task\ (1)\ ,\ [a,b]\ ,\ n) = c_0 + c_1\ x + \ldots + c_n\ x^n = \lim_{s\to\infty} y_{n,s}. \quad (6)$$

Замечание 1. Алгоритм 1 с итерационным методом Ньютона или методом более высокого порядка преобразуют уравнение (1) в последовательность ЛИУМК вида

$$L[y] + g = H[\ E(f,g,y_{n,s-1})\ \ y\ ] + G(\ H,f,g,y_{n,s-1}\ ),\ s = 1,2,\ldots\ .$$

Решать их по алгоритму [2], как правило, более сложно, чем ЛИУМК (4).

2. Алгоритм 1 и метод квазилинеаризации на задаче

$$y'' = \exp(y),\quad y(\ 0\ ) = 0,\quad y(1) = 0.$$

Эта краевая задача является одномерным аналогом уравнения гидродинамики

$$y'_{x,x} + y''_{t,t} = \exp(y).$$

Она является модельной для метода [1] и эквивалентна интегральному уравнению

$$y = K[\ \exp(y)\ ],\quad K[y] = \int_0^x (1-x)\ \ t\ \ y(t)\ dt\ + \int_x^1 (1-t)\ \ x\ \ y(t)\ dt. \quad (7)$$

Уравнение (7) и эта краевая задача имеют единственное решение – аналитическую в окрестности отрезка $[0,1]$ комплексной плоскости функцию

$$y = -\ \backslash\ln(2) + 2\ \backslash\ln(c\ \ \sec(c\ \ (x\text{-}1/2)/2),\qquad c = \text{solve}(\ \text{sqrt}(2) = c\ \ \sec(\ c/4\ )). \quad (8)$$

Отличные от нуля коэффициенты Фурье – Чебышева функции y (8) на отрезке [0,1] только четные. С возрастанием параметра $n = 2i$ они монотонно убывают к нулю $a_{2\,i}(y,$ $[0,1]) = o(q^i)$, $q < 0.01$ и принимают следующие значения:

$$\{\ a_{2\,i}(y,[0,1])\ \}_{i=0}^{9} = \{\ -0.057,\ \ 0.057,\ \ 0.00027,\ \ 2.1\ 10^{-6},\ \ 1.8\ 10^{-8},$$
$$1.66\ 10^{-10},\ \ 1.6\ 10^{-12},\ \ 1.6\ 10^{-14},\ \ 1.6\ 10^{-16},\ \ 2.1\ 10^{-18}\ \}. \quad (9)$$

Следовательно, для величины наилучшего приближения функции y (8) алгебраическими многочленами порядка n в пространстве $C_{[0,1]}$ справедливо тождество

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \|\ y(x) - (c_0 + \ldots + c_n\ \ x^n)\ \|_{C[0,1]} = (1 + o(1))\ |\ a_{2\,[n/2]+2}(y\ ,[0,1])\ |. \quad (10)$$

Вычислительный эксперимент с алгоритмом 1. С возрастанием параметра n алгоритма 1, норма погрешности решения уравнения (7) по алгоритму 1 в пространстве $C_{[0,1]}$ монотонно убывает к нулю, удовлетворяет тождества

$$\{\ \|\ y - y_{2\,i}\ \|_{C[0,1]}\ \}_{i=1}^{5} = \{\ 0.00034,\ \ 3.1\ 10^{-6},\ \ 2\ 10^{-8},\ \ 1.8\ 10^{-10},\ \ 9.7\ 10^{-12}\ \} \quad (11)$$

и скорость убывания тождественна скорости убывания четных коэффициентов Фурье – Чебышева (9) функции y (8) на отрезке [0,1] имеют место тождества

$$\|\ y - y_n\ \|_{C[0,1]}\ /\ |\ a_{2\,[n/2]+2}(y,\ [0,1])\ | = 1 + \alpha_{2\,[n/2]},\qquad \{\ \alpha_{2\,i}\ \}_{i=1}^{4} = \{\ 0.3,\ 0.5,\ 0.1,\ 0.07\ \}.$$

Коэффициент оптимальности метода решения задачи C_n (method, task, $C_{[a,b]}$) ≥ 1. Поэтому из этих тождеств и тождества (10) можно сделать следующее заключение.

Вывод 1. *Коэффициент оптимальности решения по алгоритму 1 уравнения (7) в пространстве* $C_{[0,1]}$ *асимптотически минимальный*

$$C_n(algorithm_1,\ task\ (7),\ C_{[0,1]}) = (1 + o(1))\ (1 + \alpha_{2\,[n/2]}). \quad (12)$$

Коэффициент оптимальности метода квазилинеаризации [1]. По методу [1] решают (не линейные) функциональные уравнения (*task*) на отрезке $[a,b]$ и вычисляют сеточную функцию с равноотстоящими узлами

$$y_h = \{y_{h=(b-a)/q}(x_i,\ task\ )\ \}_{i=0}^{q} = \text{method}_[1](task\ ,\ \ [a,b]\ ,\ \ q\ ) \approx \{\ y(x_i)\}_{i=0}^{q},$$
$$x_0 = a,\ \ x_1 = a + h,\ldots,x_q = b\ ,\ \ h = (b-a)/q\ .$$

Композиция метода квазилинеаризации и интерполяции алгебраическим многочленом сеточной функции y_h (вычисленной по методу квазилинеаризации) является методом вычисления алгебраического многочлена порядка q

$$P_q[\ y_h\ ] = P_q[\ \text{method_[1]}(task,\ [a,b],\ q)]. \qquad (13)$$

Этот многочлен аппроксимирует решение y функционального уравнения *task* на отрезке $[a,b]$. Норма погрешности метода (13) в пространстве $C_{[a,b]}$ не меньше соответствующей сеточной нормы. Сеточная норма погрешности метода (13) тождественна сеточной норме погрешности метода квазилинеаризации

$$\max_{x\,\in\,[a,b]} |\ y - P_q[y_h]\ | \ge \max_{i=0,\dots,q}|\ (y - P_q[y_h])\ |_{x\,=\,x_i}\ | = \max_{i=0,\dots,q}|\ y(x_i) - y_h(x_i,\ task)|.$$

Следовательно, коэффициент оптимальности метода (13) в пространстве $C = C_{[a,b]}$ не меньше

$$C_q(P_q[y_h],\ task,\ C) \ge \max_{i=0,\dots,q}|\ y(x_i) - y_h(x_i)\ |\ /\ \inf_{c_0,\dots,c_q}\ \|\ y(x) - (c_0 + \ldots + c_q\ x^q)\ \|_C\,.$$

Сравнение алгоритма 1 с методом квазилинеаризации [1]. На краевой задаче, эквивалентной уравнению (7), погрешность метода квазилинеаризации [1, с. 42]

$$\max_{i=0,\dots,10} |\ y(i/10) - y_{h=1/10}(i/10,\ task\ \ (7)\ )\ | = 3\ 10^{-7}.$$

Из этого тождества и тождеств (9) – (12) можно сделать следующее заключение.

Вывод 2. *Коэффициент оптимальности метода (13) на краевой задаче, эквивалентной уравнению (7), в 100 000 раз больше коэффициента оптимальности алгоритма 1 на уравнении (7)*

$$C_{10}(P_{10}[y_{h\,=1/10}],\ task\ \ (7),\ C_{[0,1]}) \ge 3\ 10^{-7} /\ 1.6\ 10^{-12} > 100\ 000\ .$$

Сравнение алгоритма 1 и методов с насыщением. Метод квазилинеаризации и другие сеточные методы решения функциональных уравнений являются методами с насыщением. Скорость убывания, с ростом числа узлов, погрешности решения по методу с насыщением функционального уравнения с решением аналитической функцией полиномиальная

$$\max_{i=0,\dots,n}|\ y(x_i) - y_{h=(b-a)/n}(x_i)\ | = O(n^{-p}), \quad p = p(\text{method}) = Const\ .$$

Скорость убывания (с возрастанием параметра n) величины наилучшего приближения функции y (8) алгебраическими многочленами порядка n в пространстве $C_{[0,1]}$ оценивает тождество (10). Поэтому коэффициент оптимальности метода (13) и других методов интерполяции сеточного решения y_h многочленами возрастает с ростом числа узлов сетки q и скорость роста

$$C_q(P_q[y_h],\ task\ ,\ C_{[0,1]}) = O(z^q), \quad z \ge 2\ \backslash\ .$$

Коэффициент оптимальности метода ряда Тейлора имеет такую же скорость роста. Из этих тождеств и вывода 1 можно сделать следующее заключение.

Вывод 3. *Согласно критерию, минимум коэффициента оптимальности, на краевой задаче, эквивалентной уравнению (7), композиция алгоритма преобразования этой задачи в интегральное уравнение и алгоритма 1 предпочтительнее метода (13) и метода ряда Тейлора.*

3. Алгоритм 2 – метод Галеркина с возмущением

Вход. Уравнение (1), отрезок $[a,b]$, параметр n.

Преобразования.

1. Вычислить аппроксимацию уравнения (1) по методу Галеркина

$$S_n[\ L[\ y_n \in H_n[a,b]]\ ] = S_n[\ H[\ U_n[\ f(y_n \in H_n[a,b])\ ]\ ] + \text{g}\ ], \qquad (14)$$

где оператор проектирования S_n вычисляет частную сумму порядка n ряда Фурье – Чебышева функции y на отрезке $[a,b]$ – S_n: $L_2(a,b;\rho) \to H_n[a,b]$ – с возмущением интерполированием $U_n[\,f\,]$ (2) по узлам Чебышева.

2. Вычислить начальное приближение к решению уравнения (14) $y_{n,0} = 0$.

3. Решить уравнение (14) по методу простой итерации для $s = 1,2,\ldots$:

– вычислить преобразование многочлена $y_{n,s-1}$ функцией f (1) – $f_s = f(x, y_{n,s-1})$,

– вычислить многочлены вида (2), (3) – $F_s = U_n[f_s]$, $g_s = H[F_s]$,

– вычислить ЛИУМК вида (4)

$$L[y] + g = g_s, \tag{15}$$

– вычислить решение ЛИУМК (15) на отрезке $[a,b]$ по методу Галеркина (14) – алгебраический многочлен

$$y_{n,s} = \text{solve}(S_n[L[y_n \in P_n] + g - g_s] = 0),\ S_n : L_2(a,b;\rho) \to H_n[a,b]. \tag{16}$$

4. Вычислить предел последовательности многочленов (16).

Выход. Искомая аппроксимация решения уравнения (1) $y_n = \lim_{s\to\infty} y_{n,s}$.

Теорема 1. На интегральных уравнениях Гаммерштейна вида (1) алгоритм 1 эквивалентен алгоритму 2.

Доказательство. Начальные приближения $y_{n,0} = 0$ алгоритмов 1 и 2 тождественны. Следовательно, на первой итерации ($s = 1$) алгоритм 1 вычисляет:

– функцию f_1, тождественную функции f_1 алгоритма 2,

– многочлен F_1 (2), тождественный многочлену F_1 уравнения (15),

– многочлен g_1 (3), тождественный многочлену g_1 уравнения (15),

– уравнение (4), тождественное уравнению (15),

– многочлен $y_{n,1}$ (6).

Согласно теореме 1 [2], многочлен $y_{n,1}$ (6) тождественен многочлену $y_{n,1}$ (16).

На следующих итерациях эти тождества сохраняются.

4. Сходимость алгоритма 1

Из теоремы 1, оптимальности операторов S_n и U_n как аппарата аппроксимации в пространстве $L_2(a,b,\rho)$ и $C_{[a,b]}$ [3, с. 77-95]

$$\| y - S_n[y] \|_{L2(a,b,\rho)} = \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| y(x) - (c_0 + \ldots + c_n\ x^n) \|_{L2(a,b,\rho)},$$

$$\| S_n \|_{L2(a,b,\rho)} = 1\ , \quad \| S_n \|_{C[a,b]} = (4 / \pi^2) \ln(n) + O(1),\quad O(1) < 3,\quad n > 0,$$

$$\| U_n \|_{C[a,b]} = (2 / \pi) \ln(n) + O(1),\quad O(1) < 1,\quad n > 0$$

можно сделать следующее заключение.

Вывод 4. *Результаты исследования метода Галёркина* [4, *гл. 4*] *на достаточно широком классе уравнений Гаммерштейна* (1) *доказывают:*

– *существование многочлена* y_n (6) – *аппроксимации искомого решения,*

– *сходимость последовательности многочленов* (6) *к точному решению уравнения*

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n ,$$

– *ограниченность коэффициента оптимальности алгоритма 1.*

5. Оценки погрешности алгоритма 1

Апостериорные оценки. Теорема 3 [2] устанавливает точные и конструктивные апостериорные оценки нормы в пространстве $C_{[a,b]}$ погрешности решения ЛИУМК (4) по алгоритму [2]. Если последовательность этих оценок для $s = 1,2,\ldots$ сходится, то ее предел естественно принять за оценку погрешности алгоритма 1 на уравнении Гаммерштейна (1).

Пример 1. Для решения уравнения (7) по алгоритму 1 мы преобразовали это уравнение в уравнение

$$y - K[y] = K[\exp(y) - y], \tag{17}$$

где $K[\ y\ ]$ – линейный интегральный оператор уравнения (7). ЛИУМК (4) для уравнения (17) имеет вид

$$y - K[\ y\ ] = K[\ U_n[\ \exp(y_{n,s\text{-}1}) - y_{n,s\text{-}1}\ ]\ ]. \qquad (18)$$

Оценка по теореме 3 [2] нормы в пространстве $C_{[0,1]}$ погрешности решения по алгоритму [2] ЛИУМК (18) на отрезке [0,1] с параметром n имеет вид

$$\|\ W_{2\,[n/2]\,+2}(x)\ \|_{C[0,1]}\ |\ \tau(n,s)\ |,\ s = 1,2,\ldots, \qquad (19)$$

где $\tau(n,s) = \tau(2\ [n/2],s)$ – отличный от нуля коэффициент дополнительного многочлена решения ЛИУМК (18) по алгоритму 1 с параметром n. Если $s > 2$, то элементы последовательности $\tau(n,1)$, $\tau(n,2)$,… не изменяются. Для $n = 6$ эта последовательность имеет значения $6.8\ 10^{-10}$, $1.839\ 10^{-10}$, $1.83857\ 10^{-10}$,…, $1.83857\ 10^{-10}$,…. Эти последовательности имеют пределы

$$\{\ \tau(2),\ \tau(4),\ldots,\ \tau(10)\ \} = \{\ 0.00028,\ 2.1\ 10^{-6},\ 1.8\ 10^{-8},\ 1.7\ 10^{-10},\ 1.6\ 10^{-12}\ \}.$$

Для оператора $L[\ y\ ] = y - K[\ y\ ]$ ЛИУМК (18) норма функции

$$W_n(x) = L^{-1}[\ \mathrm{cheb}(n,\ 2\,x - 1)\ ] = \mathrm{cheb}(n,2\,x - 1) + \ldots + K^i[\ \mathrm{cheb}(n,2\,x - 1)\ ] + \ldots$$

в пространстве $C_{[0,1]}$ принимает следующие значения:

$$\|\ W_{2\,i}(x)\ \|_{C[0,1]} = \|\ L^{-1}[\ \mathrm{cheb}(2\,i\ ,2\,x - 1)\ ]\ \|_{C[0,1]} = 1,\ i = 0,\ 1,\ldots\ . \qquad (20)$$

Следовательно, предел полученных по теореме 1.2 оценок (19) погрешности алгоритма [2] на ЛИУМК (18) при $s \to \infty$ является эффективной оценкой погрешности алгоритма 1 на уравнении Гаммерштейна (7).

Априорные оценки. Теорема 4 [2] устанавливает точные и конструктивные априорные оценки нормы в пространстве $C_{[a,b]}$ погрешности решения ЛИУМК (4) по алгоритму [2] и доказывает ограниченность коэффициента оптимальности алгоритма [2]. Этот коэффициент зависит только от оператора $L[\ y\ ]$. Если линейная часть функции f уравнения Гаммерштейна (1) мала, то оценка коэффициента оптимальности решения ЛИУМК (4) по алгоритму [2] достаточно точно оценивает коэффициент оптимальности решения этого уравнения по алгоритму 1.

Пример 2. Оценка по теореме 4 [2] коэффициента оптимальности в пространстве $C = C_{[0,1]}$ решения по алгоритму [2] ЛИУМК (18) на отрезке [0,1] с параметром $n = 2\ i + 1$ или $n = 2\ i$ имеет вид

$$C_n(\ \mathrm{algorithm_[2]},\ (18),\ \mathrm{C}\ ) \approx \|\ W_{2\ i+2}(x)\ \|_{\mathrm{C}}\ /\ a_{2\ i+2}(\ W_{2\ i+2}\}(x),\ [0,1]). \qquad (21)$$

Мы вычислили составляющие оценки (21): $\|\ W_{2\ i+2}(x)\ \|_{C[0,1]} = 1$ (20) и

$$1/a_{2\ i}(\ W_{2\ i}(x),\ [0,1]\ ) = 1 + \delta_{2\ i}, \qquad (22)$$

$\{\ \delta_{2\ i}\}_{i=0}{}^{6} = \{\ 0.06,\ 0.04,\ 0.008,\ 0.0036,\ 0.0022,\ 0.0013,\ 0.00087\ \}$.

Следовательно, полученные по теореме 4 [2] оценки (21) коэффициента оптимальности алгоритма [2] на ЛИУМК (18) являются эффективной оценкой коэффициента оптимальности алгоритма 1 на уравнении Гаммерштейна (7) и (17) в пространстве $C_{[0,1]}$.

6. Вычисление оценки погрешности алгоритма 1

На основании оценок [2], мы построили алгоритмы 2 и 3 вычисления апостериорных и априорных оценок погрешности решения ЛИУМК (4) по алгоритму [2] в пространстве $C_{[a,b]}$. Для ЛИУМК (18) по этим алгоритмам с параметром q вычисляют многочлен

$$W_{n,q}(x) \approx W_n(x),\ \|\ W_{n,q}(x) - W_n(x)\ \|_{C[0,1]} \le |\ \tau(n,\ q)\ |$$

и один отличный от нуля коэффициент дополнительного многочлена $\tau(n,\ q)$. Этот коэффициент убывает к нулю (с ростом параметра q)

$$|\ \tau(n,\ q)\ | = o(u^{q\ -\ n}),\ u < 0.1. \qquad (23)$$

Поведение коэффициента $\tau(n, q)$ хорошо иллюстрируют его значения

$$\{ \tau(2\,i,\,10) \}_{i=0}^{6} = \{ 2\,10^{-16},\,3\,10^{-15},\,8\,10^{-13},\;4\,10^{-10},\;3\,10^{-7},\;5\,10^{-4},\;1 \}\,.$$

Следовательно, в случае ЛИУМК (18) отрезка [0,1] и параметра n:
– вычисленная по алгоритму 2 аппроксимация

$$\|\, W_{2\,[n/2]+2,q}(x)\,\|_{C[0,1]}\, |\,\tau(n,\,s)\,|\,,\qquad s = 1,2,\ldots$$

оценки (19) имеет погрешность

$$|\;\|\, W_{2\,[n/2]+2}(x)\,\|_{C[0,1]} - \|\, W_{2\,[n/2]+2,q}(x)\,\|_{C[0,1]}\,|\;|\,\tau(n,\,s)\,| \le |\,\tau(2[n/2]+2,\,q)\,|\;|\,\tau(n,\,s)\,|,$$

– коэффициент Фурье – Чебышева порядка n многочлена $W_{n,q}(x)$ аппроксимирует коэффициент Фурье – Чебышева порядка n функции $W_n(x)$ с погрешностью

$$|\, a_{\mathrm{n}}(\, W_{n,q}(x)\,,\,[0,1]\,) - a_n(\, W_n(x)\,,\,[0,1]\,)\,| \le |\,\tau(n,\,q)\,|\,,$$

– вычисленная по алгоритму 3 аппроксимация

$$\|\, W_{2\,[n/2]+2,q}(x)\,\|_{C[0,1]}\;\; 1/a_{2\,[n/2]+2}(\, W_{2\,[n/2]+2,q}(x),[0,1]\,)$$

оценки (21) коэффициента оптимальности алгоритма [2] имеет погрешность

$$O(\,|\,\tau(2\,[n/2]+2,\,q)\,|\,),$$

– коэффициент $\tau(n, q)$ удовлетворяет тождество (23).

7. Программирование алгоритма 1 в APS

Структура данных на входе.

1. Уравнение (1) определяют операторы L, H, функция f и многочлен g.
2. Линейные интегральные операторы $L = L[\,y\,]$, $H = H[\,y\,]$ являются суммой операторов вида

$$A\;\; y\,,\quad \int_{c(x)}^{d(x)} K(x,t)\;\; y(t)\; dt\,,\qquad x \in [a,b] \to [c(x),d(x)] \subset [a,b]\,,$$

где ядра, пределы интегрирования и коэффициент A являются алгебраическими многочленами. Эти операторы имеют вид

A * y + int_op(c_1, d_1, K_1 * y, t) +
+ . . . + int_op(c_s, d_s, K_s * y, t).

Искомая функция ***y*** является атомом.
Многочлены A, c_1,..., c_s, d_1,..., d_s являются термами.
Они имеют естественный для математики вид. Их аргумент x является атомом **x**.
Ядра – многочлены K_1, ..., K_s являются термами.
Они имеют естественный для математики вид.
Их аргументы x, t являются атомами x, t.

3. Функция $f(y) = f(x,y)$ – нелинейность уравнения (1) – имеет естественный для математики вид и её аргументы x, y являются атомами x, t.
4. Многочлен g является термом и имеет естественный для математики вид. Его аргумент x является атомом x.
5. Отрезок $[a, b]$ определяет список (a, b) ''.
6. Параметр n алгоритма является целым числом.

Структура данных на выходе. Многочлен y_n (6) имеет числовые коэффициенты и естественный для математики вид d + ... + f * x ^ n .

APLAN-процедура 1. Алгебраическая спецификация п. 2 алгоритма 1.

```
f_s := subs( y = y_n, fy );                  /*  f_s  */
F_s := Cheb_interpol(f_s , interval , n);   /*  U_n[f_s]  */
g_s := sub_i_u(Hy , F_s);                    /*  g_s  */
LIUMK := ( Ly + g + (-1) * g_s = 0 );        /*  ЛИУМК  */
```

APLAN-процедура – реализация алгоритма [2].

Структура выхода операторов APLAN-процедуры.
На каждой итерации процедура вычисляет:
– функцию $f_s = f(x,y_{n,s\text{-}1})$ естественного для математики вида,
– многочлен $F_s = U_n[f_s]$ (2) естественного для математики вида,
– многочлен $g_s = H[F_s]$ (3) естественного для математики вида,
– ЛИУМК (4) вида, принятого в процедуре, реализующей алгоритм [2]

A * y + int_op(c_1 , d_1 , K_1 * y , t) + ...
+ int_op(c_s , d_s , K_s * y , t) + g + -1 * g_s = 0 ,

– решение ЛИУМК (4) процедурой, реализующей алгоритм [2], – многочлен y_n с числовыми коэффициентами естественного для математики вида.

8. Исследование APLAN-процедуры

Теорема 2. APLAN-процедура на каждой итерации имеет по параметру n полиномиальную сложность

$$(m+1)\ Q(\text{ canplf }, m\ ) + O(\ n^3\ ),$$
$$m \le \max\ \{\ \deg(\ L[\ y_n \in P_n\ ]\ ),\ \deg(\ H[\ y_n \in P_n\ \ ] + \mathrm{g}\ )\ \} = n + O(1),$$

где $Q(\text{ canplf }, m\ )$ – сложность преобразования оператором canplf многочлена P.
Многочлен canplf(P) является суммой мономов вида

c(i) * x ^ j $ b, $i = 0,\ldots,m$, j = 0,…,m.

Доказательство. APLAN-процедура – линейная. Следовательно, вычислительная сложность процедуры тождественна сумме вычислительной сложности операторов этой процедуры. Вычислительная сложность процедуры, реализующей алгоритм [2], является доминирующей. Остальные операторы процедуры имеют по параметру n полиномиальную сложность $O(n^s)$, s ≤ 3 .

9. Вычислительный эксперимент с процедурой

Описание уравнения (17) на языке APLAN.

```
process[1] := (fy := exp(y) + -1 * y ;  g := 0 ;
Ly := y + int_op(0, x, (-1 * ((x + -1) * t)) * y, t) +
int_op(x, 1, (-1 * (x * (t + -1))) * y, t) ;
Hy := int_op(0, x, ((x + -1) * t) * y, t) +
int_op(x, 1, (x * (t + -1)) * y, t) ; interval := (0 , 1) ;...).
```

Результаты решения процедурой уравнения (17) ($n = 2$).

```
f_s := subs(y = y_n, fy) =                    1;
F_s := Cheb_interpol(fy_n , interval , n) =           1;
g_s := sub_i_u(Hy , F_s) + g =    0.5 * x ^ 2 + -0.5 * x ;
LIUMK := ( Ly + g + -1 * F_s = 0 ) = y +
int_op(0, x, (-1 * ((x + -1) * t)) * y, t) + int_op(x, 1,
(-1 * (x * (t + -1))) * y, t) + -0.5 * x ^ 2 + 0.5 * x ;
... y_n =  0.452697 * x ^ 2 + -0.452697 * x + -0.000294724;
... F_s := Cheb_interpol(fy_n , interval , n) =
-0.0248033 * x ^ 2 + 0.0248033 * x + 1 ;
... y_n = 0.455043 * x ^ 2 + -0.455043 * x + -0.000280104;
... y_n = 0.455067 * x ^ 2 + -0.455067 * x + -0.000279958.
```

Вывод 5. *Результаты вычислительного эксперимента – иллюстрация эффективности теоремы* 2.

10. Программирование алгоритма 1 в СКА

Построенная выше APLAN-процедура доказывает возможность реализации алгоритма 1 в других СКА. Результаты исследования этой процедуры доказывают эффективность такой реализации.

11. Практическая задача

Конечные деформации упругой струны под действием поперечной нагрузки хорошо моделирует краевая задача

$$y'' = 1 + a^2 (y')^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \tag{24}$$

Эта задача предложена В. Прагером [1, с. 43]. Задача (25) эквивалентна уравнению

$$y = K[\, 1 + a^2 (y')^2 \,], \quad K[\, y \,] = \int_0^x (1 - x)\, t\, y(t)\; dt \; + \int_x^1 (1 - t)\, x\, y(t)\; dt. \tag{25}$$

Задача (24) и уравнение (25) имеют единственное решение – аналитическую в окрестности отрезка [0,1] комплексной плоскости функцию

$$y = 1/a^2 \ln(\, \cos(a\, (x - 1/2)) \,/\, \cos(a/2)\,). \tag{26}$$

Отличные от нуля коэффициенты Фурье – Чебышева функции y (26) на отрезке [0,1] только четные. С возрастанием параметра $n = 2\, i$ эти коэффициенты регулярно убывают к нулю $|\, a_{2\, i}(\, y,\, [0,1]\,)\, | = o(q^i)$, $q < 0.01$ и, в случае параметра $a = 0.7$, принимают следующие значения:

$$\{\, a_{2\, i}(\, y\, ,\, [0,1]\,)\, \}_{i\, =\, 0}^{9} = \{\, 0.064,\ -0.064\, ,\ -0.00034,\ -2.8\; 10^{-6},\ -2.7\; 10^{-8},$$
$$-2.7\; 10^{-10},\ -2.9\; 10^{-12},\ -3.2\; 10^{-14},\ -4.6\; 10^{-16},\ 6.2\; 10^{-18}\, \}. \tag{27}$$

Следовательно, для величины наилучшего приближения функции y (26) ($a = 0.7$) алгебраическими многочленами порядка n в пространстве $C_{[0,1]}$ справедливо тождество (10).

Вычислительный эксперимент с алгоритмом 1. С возрастанием параметра n алгоритма 1, норма погрешности решения уравнения (25) с параметром $a = 0.7$ по алгоритму 1 в пространстве $C_{[0,1]}$ убывает к нулю и удовлетворяет тождества

$$\{\, \|\, y - y_{2\, i}\, \|_{C[0,1]}\, \}_{i\, =1}^{5} = \{\, 0.00036,\ 3.4\; 10^{-6},\ 3.1\; 10^{-8},\ 2.9\; 10^{-10},\ 6.6\; 10^{-12}\, \}. \tag{28}$$

Скорость убывания тождественна скорости убывания четных коэффициентов Фурье – Чебышева (27) функции y (26) на отрезке [0,1] имеют место тождества

$$\|\, y - y_n\, \|_{C[0,1]} \,/\, |\, a_{2\, [n/2]\, +\, 2}(\, y\, ,\, [0,1]\,)\, | = 1 + \alpha_{2\, [n/2]},\ \{\, \alpha_{2\, i}\, \}_{i\, =1}^{4} = \{\, 0.063,\, 0.21,\, 0.17,\, 0.08\, \}.$$

Коэффициент оптимальности метода решения задачи C_n (method, $task$, $C_{[a,b]}$) ≥ 1 .

Поэтому из этих тождеств и тождества (10) можно сделать следующее заключение.

Вывод 6. *Коэффициент оптимальности решения по алгоритму 1 уравнения (25) с параметром* $a = 0.7$ *в пространстве* $C_{[0,1]}$ *– асимптотически минимальный*

$$C_n(\text{algorithm_1, task (25) } (\, a = 0.7\,),\, C_{[0,1]}) = (\, 1 + o(1)\,)\, (\, 1 + \alpha_{2\, [n/2]}\,).$$

Сравнение алгоритма 1 с методом квазилинеаризации [1]. На краевой задаче (24), эквивалентной уравнению (25), согласно [1, с. 42], метод квазилинеаризации имеет погрешность $\max_{i=0,\ldots,10}|\, y(i/10) - y_{h=1/10}(i/10,\, task\, (24)\,)\, | = 3\; 10^{-6}$.

Из этого тождества и тождеств (27) – (29) можно сделать следующее заключение.

Вывод 7. *Коэффициент оптимальности метода (13) на краевой задаче (24) с параметром* $a = 0.7$ *в пространстве* $C_{[0,1]}$ *(эквивалентной уравнению (25)) в 1 000 000 раз больше коэффициента оптимальности алгоритма 1 на уравнении (25)*

$$C_{10}(\, P_{10}[\, y_{h=1/10}\,],\, task\, (24),\, C_{[0,1]}\,) \geq 3\; 10^{-6} \,/\, 2.9\; 10^{-12} > 1\,000\,000.$$

Заключение

Алгоритм 1 решает в СКА интегральные уравнения Гаммерштейна вида (1) на отрезке $[a,b]$ и вычисляет алгебраический многочлен y_n (6) порядка $n \in N$. Эта аппроксимация решения уравнения Гаммерштейна (1) оптимальна для символьных преобразований в СКА – коэффициент оптимальности алгоритма в пространстве $C_{[a,b]}$ ограничен на широком классе уравнений Гаммерштейна.

Алгоритм 1 на уравнениях Гаммерштейна реализует идею В.К. Дзядыка.

На основании *a*-метода построить эффективные численные методы решения функциональных уравнений.

Дополнение

1. **Алгоритм 1'** – модификация алгоритма 1. Алгоритм [2] заменен алгоритмом *a*-метода, где базис дополнительного многочлена является ортогональным базисом пространства Гильберта $H_{[a,b]}$..

2. Для алгоритма 1' имеют место аналог теоремы 1 и аналоги применения теорем 1 – 4 [2]. В них пространство $L_2(a,b;\rho)$ заменено пространством $H_{[a,b]}$..

3. **APLAN-процедура 1'** – модификация процедуры 1. Процедура, реализующая алгоритм [2], заменена реализацией алгоритма *a*-метода с ортогональным базисом пространства Гильберта $H_{[a,b]}$.

Литература

1. Беллман Р. и Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 183 с.
2. Денисенко П.Н. Оптимальный метод решения интегральных уравнений с ядрами типа функции Грина // Наукові записки Кіровоградського державного педагогічного університету. – Серія: Математичні науки. – Вип. 65. – 2006. – С. 38-49.
3. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
4. Красносельский М.А., Вайникко Г.М. и др. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 456 с.

П.М. Денисенко

Оптимальний алгоритм для розв’язування інтегральних рівнянь Гаммерштейна в системах комп’ютерної алгебри

У роботі побудовано алгебраїчний алгоритм для обчислення в системах комп’ютерної алгебри алгебраїчного многочлену y_n порядку $n \in N$. Цей многочлен – апроксимація розв’язку $y = y(x)$, $x \in [a,b]$ інтегрального рівняння Гаммерштейна. Ця апроксимація оптимальна в просторі $C_{[a,b]}$.

P.N. Denisenko

Optimal Algorithm of Solving the Hammerstein Integral Equations in the Computer Algebra Systems

We constructed the algebraic algorithm for computing in the computer algebra systems the algebraic polynomial y_n of order $n \in N$. This polynomial is the optimal approximation for the Hammerstein integral equation solution $y = y(x)$, $x \in [a,b]$ in $C_{[a,b]}$.

Статья поступила в редакцию 07.07.2008.